DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $\overrightarrow{x'x}$, $\overrightarrow{y'y}$. On dit qu'une courbe Γ est de type (T) si la condition suivante est remplie :

Il existe une fonction p réelle, définie sur $\mathbb{R}$, admettant 2π pour période, continûment dérivable jusqu'à l'ordre 3 inclus, vérifiant la propriété :

$$\forall \theta \in R \quad , \quad p(\theta) > 0 \quad \text{et} \quad p(\theta) + p''(\theta) > 0 \ ;$$

et telle que Γ soit l'enveloppe de la famille des droites $D(\theta)$ d'équation :

$$D(\theta) \ : \ x \cos\theta + y \sin\theta - p(\theta) = 0 \ .$$

Dans tout le texte Γ désigne une courbe quelconque de type (T), déterminée par une fonction $p(\theta)$ donnée ; M est le point de contact de Γ avec $D(\theta)$, $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont les vecteurs unitaires d'angles polaires respectifs θ et $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.

Les deux parties I et II sont largement indépendantes.

I

1°/ Quelles sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ et $\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{d\,\theta}$ dans la base mobile $(\vec{u}, \vec{u'})$; montrer que $\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{d\,\theta}$ n'est jamais nul.

Démontrer que Γ admet deux tangentes distinctes et deux seulement de direction δ, quelle que soit δ. Quelle est la position de O par rapport à deux tangentes parallèles ? Montrer l'existence d'un cercle de centre O et de rayon non nul qui n'est coupé par aucune des droites $D(\theta)$ et auquel tous les points de Γ sont extérieurs.

A quelle condition doit satisfaire p pour que O soit centre de symétrie ? Plus généralement caractériser les fonctions p qui déterminent des courbe de type (T) admettant un centre de symétrie.

2°/ Démontrer que toute courbe Γ' déduite de Γ par une rotation de centre O est aussi de type (T).

3°/ Soit y l'ordonnée de M dans le repère $(O \vec{i}, \vec{j})$. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Etudier les variations de y en fonction de θ, en déduire :

a) que l'axe $x'x$ coupe Γ en deux points distincts, situés de part et d'autre de O, et qu'il en est de même pour toute droite passant par O ;

b) que les parallèles à $x'x$, et plus généralement toute droite du plan, coupent Γ en deux points au plus ;

c) que Γ est située toute entière du même côté que O par rapport à chacune de ses tangentes.

4°/ On définit l'intérieur de Γ comme l'ensemble des points des segments limités sur les droites passant par O par leurs deux points d'intersection avec Γ.

Soit P un point n'appartenant pas à Γ ; comparer les deux propriétés :

"P est intérieur à Γ"

et

"P est du même côté que O par rapport à toute tangente à Γ".

Soit AB une corde de Γ ; tout point intérieur au segment AB est-il intérieur à Γ ?

5°/ Soit N le transformé de M par une affinité orthogonale $\mathcal{A}$ d'axe $x'x$ et de rapport k, que l'on peut supposer positif, et c la courbe décrite par N quand θ varie.

Déterminer en fonction de θ le vecteur unitaire $\overrightarrow{V'}$ d'angle polaire $\alpha + \frac{\pi}{2}$, tel que l'on ait :

$$\frac{d\,\overrightarrow{ON}}{d\theta} = r(\theta)\,\overrightarrow{V'} \qquad r(\theta) > 0 .$$

Montrer que c est une courbe de type (T). Quel est le transformé par $\mathcal{A}$ de l'intérieur de Γ ?

En déduire que toute ellipse de centre O est une courbe de type (T).

II

On oriente Γ dans le sens des θ croissants par exemple.

1°/ Démontrer que Γ est rectifiable. Le point A de paramètre 0 étant choisi pour origine sur Γ, exprimer en fonction de θ, de p et de ses dérivées, l'abscisse curviligne s du point M, et la longueur L de Γ.

En chaque point M, Γ admet un centre de courbure ω et un rayon de courbure qui est la mesure de $\overrightarrow{M\omega}$ sur l'axe $\overrightarrow{z'z}$ passant par O et d'angle polaire $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{z'z}) = \theta + \pi$. On note respectivement $R(\theta)$ et $\rho(s)$ les expressions du rayon de courbure en fonction soit du paramètre θ, soit de l'abcisse curviligne s du point M.

2°/ Deux points sont dits antipodes si les tangentes en ces points sont parallèles et si les rayons de courbures y sont égaux.

a) On considère : $F(\theta) = R(\theta) - R(\theta + \pi)$.

Caractériser les couples de points antipodes de Γ à l'aide des racines de l'équation $F(\theta) = 0$.

Démontrer que cette équation admet au moins deux racines θ_0 et $\theta_0 + \pi$ et qu'on peut choisir $\overrightarrow{x'x}$ pour que ces deux points antipodes soient obtenus pour 0 et π.

b) Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} F(\theta) \sin\theta \, d\theta$. En déduire que Γ possède au moins trois couples de points antipodes.

3°/ On suppose que la courbure de Γ $k(s) = \dfrac{1}{\rho(s)}$ n'est constante sur aucun intervalle ouvert non vide où elle est définie. On appelle sommet de Γ tout point où la dérivée k' s'annule en changeant de signe.

a) Démontrer que Γ a au moins deux sommets S_1 et S_2.

b) Soit Ω un point fixe de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{\Omega I}$ un vecteur fixe. M décrivant Γ, calculer l'intégrale vectorielle

$$\int_{\Gamma} k'(s)\, \overrightarrow{\Omega M}(s)\, ds$$

ainsi que l'intégrale

$$\int_{\Gamma} k'(s)\, \overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{\Omega M}(s)\, ds .$$

Par un choix convenable de Ω et du vecteur $\overrightarrow{\Omega I}$, démontrer que Γ possède au moins quatre sommets.