ECOLE POLYTECHNIQUE CONCOURS 1970

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers positifs ou nul, l'anneau des entiers relatifs, le corps des nombres réels . Pour tout x réel, on note x_+ le plus grand des deux nombres x et 0 . Enfin m est un entier au moins égal à 2 .

I

Dans cette partie, on choisit $m+1$ nombres réels distincts $a_0, a_1, \ldots, a_m$ et on note P et Q_i respectivement les polynômes à coefficients réels de la variable T définis par

$$P(T) = (T-a_0)(T-a_1)\ldots(T-a_m) = \prod_{i=0}^{m}(T-a_i)$$

et

$$(T-a_i)\,Q_i(T) = P(T) \qquad \text{pour } i = 0, 1, \ldots, m\,.$$

1°/ Pour tous les couples d'entiers i, j différents et tels que $0 \leqslant i \leqslant m$ et $0 \leqslant j \leqslant m$, vérifier les relations suivantes, où P' désigne la dérivée de P :

$$Q_i(a_j) = 0$$
$$Q_j(a_j) = P'(a_j) \neq 0\,.$$

En déduire que les polynômes Q_i ($i = 0, 1, \ldots, m$) sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant m$, on a l'égalité qui suit, entre polynômes à deux variables T et X :

$$(T-X)^k = \sum_{i=0}^{m} \frac{(a_i - X)^k\, Q_i(T)}{P'(a_i)}\,.$$

2°/ Etablir pour tout entier h, tel que $0 \leqslant h \leqslant m-1$, l'égalité

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{m} \frac{(a_i - X)^h}{P'(a_i)} = 0\,.$$

…/…

et aussi l'égalité

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{m} \frac{(a_i - X)^m}{P'(a_i)} = 1 .$$

Etablir les relations

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{P'(a_i)} = 0 \quad ; \quad \sum_{i=0}^{m} \frac{a_i^k}{P'(a_i)} = 0 \qquad \text{pour } k = 1,\dots, m-1 \ ;$$

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{a_i^m}{P'(a_i)} = 1 \quad .$$

3°/ On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout x réel

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{[(a_i - x)_+]^{m-1}}{P'(a_i)} .$$

a) Vérifier que l'on a $f(x) = 0$ lorsque x est plus petit que tous les nombres a_i ($i = 0,\dots, m$) ou plus grand que tous les nombres a_i ($i = 0,\dots, m$) :

b) Montrer que la fonction f admet en tout point de $\mathbb{R}$ des dérivées continues jusqu'à l'ordre $m-2$ inclus (par convention, la dérivée d'ordre zéro d'une fonction est cette fonction elle-même) .

c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

II

Pour tout entier j de $\mathbb{Z}$, on pose :

$$P_j(T) = \prod_{i=0}^{m} (T - i - j)$$

et

$$f_j(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{[(i + j - x)_+]^{m-1}}{P_j'(i+j)}$$

où T désigne une variable et x un nombre réel quelconque .

…/…

1°/ Montrer que la famille $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une famille de fonctions linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Comparer $f_j(x)$ et $f_{j+1}(x+1)$.

2°/ Pour $m = 3$, étudier la fonction f_0 et la représenter graphiquement. Comment s'en déduisent les représentations graphiques des fonctions f_j pour j dans $\mathbb{Z}$?

Dans toute la suite, m est de nouveau un entier naturel quelconque.

3°/ Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ; montrer que la série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de terme général $c_n f_n$, est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

Montrer que cette convergence est uniforme si et seulement si la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite 0.

4°/ Pour tout x réel et pour tout n entier positif, on pose

$$s_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} f_j(x).$$

Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$? Est-elle uniformément convergente sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$?

On désigne par s la limite simple de la suite de fonctions $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$; montrer que la fonction s est périodique.

5°/ Montrer que la fonction s admet une dérivée continue d'ordre $m-2$. Prouver que la fonction s est constante et calculer la valeur de cette constante à l'aide de l'intégrale $\int_0^1 s(x)\, dx$.