COMPOSITION DE CALCUL NUMERIQUE (1 h 30)

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ de coefficients

$a_1 = -5{,}4502 \qquad a_2 = 8{,}7348 \qquad a_3 = -4{,}0086$

1°/ Calculer à la précision des tables de logarithme à 5 décimales, $\dfrac{a_2}{a_1}$ et $\dfrac{a_3}{a_2}$.

2°/ Sur la 3ème page de la copie, dresser un tableau à 10 lignes et 7 colonnes dont les éléments désignés par $A(p, q)$, $[1 \leqslant p \leqslant 10,\ 1 \leqslant q \leqslant 7]$ sont définis par les relations suivantes :

a) pour tout p, $A(p, 1) = A(p, 7) = 0$;

b) $A(1, 2) = +5{,}450$ (valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de $-a_1$)

$A(1, 3)$ est la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de $\dfrac{a_2}{a_1}$;

$A(1, 5)$ est la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de $\dfrac{a_3}{a_2}$;

$A(1, 4) = A(1, 6) = 0$.

c) pour $q = 2$, 4 ou 6 (et pour tout p, avec $p \geqslant 1$)

$$A(p+1, q) = A(p, q) + A(p, q+1) - A(p, q-1) \ ;$$

d) pour $q = 3$ ou 5 (et pour tout p, avec $p \geqslant 1$)

$$A(p+1, q) = \frac{A(p, q) . A(p+1, q+1)}{A(p+1, q-1)} .$$

Alternant l'usage des relations de récurrence c) et d) on peut déterminer, ligne après ligne, tous les éléments du tableau. Les multiplications et divisions étant exécutées à *la règle à calcul*, on conservera pour chaque nombre du tableau 3 chiffres après la virgule. Par exemple, on calculera d'abord $A(2, 2)$ qu'on trouve égal à 3,847, $A(2, 4)$, $A(2, 6)$ puis $A(2, 3)$ et $A(2, 5)$, ce dernier nombre étant égal à $-0{,}184$.

Aucune étude d'approximation n'est demandée pour cette question.

..../....

3/ On admettra sans démonstration que si on donnait respectivement à $A(1, 2)$ $A(1, 3)$ $A(1, 5)$ les valeurs exactes $-a_1$, $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_2}$, les suites $A(p, 2)$ $A(p, 4)$ $A(p, 6)$ de la 2ème question, convergeraient vers les 3 racines réelles du polynôme $P(x)$. Le nombre $A(10, 6)$ trouvé dans le tableau précédent est donc voisin d'une de ces racines ; sa meilleure valeur décimale approchée à 1/10 près apparaît égale à $\alpha = 0{,}8$.

Appliquer une fois la méthode de Newton à cette valeur α, déterminer des majorantes des diverses incertitudes et obtenir ainsi un bon encadrement de l'une des racines de $P(x)$. Déterminer un bon encadrement de chacune des deux autres racines de $P(x)$ par la méthode que l'on jugera préférable.

Remarque I . Pour calculer $P(\alpha)$ et $P'(\alpha)$ on emploiera l'algorithme suivant :

$$b_1 = \alpha + a_1 \longrightarrow b_2 = \alpha b_1 + a_2 \longrightarrow P(\alpha) = \alpha b_2 + a_3$$

$$c_1 = \alpha + b_1 \longrightarrow P'(\alpha) = \alpha c_1 + b_2 .$$

Remarque II . Dans la recherche d'une valeur approchée d'une racine x_0 de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton appliquée à une valeur a de la variable voisine de x_0, l'incertitude due à la méthode est en valeur absolue majorée par $\frac{M(b-a)^2}{2\,|f'(a)|}$ où a et b sont les bornes d'un intervalle I contenant x_0, et M un majorant de $|f''(x)|$ dans l'intervalle I.